Matematika 1 (2011/2012)

DETERMINANTE

Determinanta realne kvadratne matrice je funkcija $\det : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$.
Determinantu matrice A označavamo s

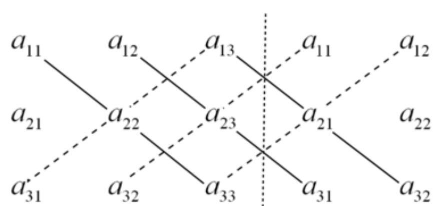
$$\det A \quad \text{ili} \quad |A| \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Najopćenitija metoda za računanje determinante neke matrice je **Laplaceov razvoj** deteminante po nekom retku ili stupcu.

Iz Laplaceovog razvoja slijedi da je za kvadratnu matricu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pripadna determinanta određena sa:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Sarrusovo pravilo za računanje determinanti primjenjuje se isključivo za određivanje determinanti 3×3 matrica. Da bi se pomoću ovoga pravila odredila determinanta potrebno je dopisati prva dva stupca determinante, zatim zbrojiti produkte elemenata u smjeru glavne dijagonale i od dobivenog broja oduzeti produkte elemenata u smjeru sporedne dijagonale.



Determinante višeg reda rješavamo Laplaceovim razvojem po elementima nekog stupca ili retka svođenjem na determinante nižeg reda. Postupak se nastavlja sve dok ne dobijemo razvoj po determinanti drugog reda. Na primjer, razvoj determinante 4.reda po prvom retku:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}$$

$$-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Odabir predznaka u Laplaceovom razvoju ovisi o parnosti/neparnosti zbroja indeksa elementa a_{ij}. Ako je zbroj paran ispred elementa a_{ij} pišemo +, a inače pišemo -.

Na primjer za matrice reda 3 i 4, kod razvijanja determinante se koristimo shemom predznaka:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \quad i \quad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Ne postoji općeniti postupak koji bi bio koristan pri izračunavanju determinanti n-tog reda. Najčešće se koristimo svojstvima determinanti bilo u pokušaju da ih svedemo na trokutasti oblik, bilo na oblik pogodan za Laplaceov razvoj ili da uočimo vezu između determinante i sličnih determinanti manjeg reda.

Svojstva determinanti:

D1: $\det A = \det A^T$

D2: Međusobnom zamjenom dva retka ili dva stupca matrice, njezina determinanta mijenja predznak.

D3: Ako matrica ima nul redak ili nul stupac tada je njezina determinanta jednaka nuli.

D4: Determinanta matrice koja ima dva jednaka ili proporcionalna retka (ili stupca) je jednaka nuli.

D5: Determinanta svake jedinične matrice je jednaka 1.

D6: Determinanta matrice dobivene množenjem skalarom samo jednog retka (ili stupca) polazne matrice jednaka je determinanti početne matrice pomnoženoj s istim skalarom.

D7: Determinanta se ne mijenja ako u polaznoj matrici jednom stupcu (retku) pribrojimo neki drugi stupac (redak) pomnožen s nekim brojem.

D8: Determinanta trokutaste matrice jednaka je umnošku elemenata na dijagonali te matrice.

D9: **Binet-Cauchyjev teorem**: $\det AB = \det A \cdot \det B$.